PROPORCIONALIDAD NUMÉRICA

1. MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

- Para hacer un postre de limón, Ana dispone de una tabla en la que se indican las cantidades necesarias de leche condensada y de limón. Tenemos dos magnitudes: el número de botes de leche y el número de limones. En la tabla siguiente se muestran algunas de estas cantidades:

Nº de limones	3	6	9	12	15
Botes de leche	1	2	3	4	5

Podemos observar que:

a) El cociente o razón entre el número de limones y el número de botes de leche es siempre 3:

$$\frac{3}{1}=\frac{6}{2}=\frac{9}{3}=\frac{12}{4}=\frac{15}{5}=\ldots=3$$

Por eso: Nº de limones = Nº de botes de leche multiplicado por 3.

Nº de botes de leche = Nº de limones dividido por 3.

b) También vemos que al duplicar, triplicar, etc., el número de limones, se duplica, triplica, etc., el número de botes de leche.

Por cumplir estas dos condiciones equivalentes se dice que las magnitudes número de botes de leche y número de limones son *magnitudes directamente proporcionales* (o simplemente, *magnitudes proporcionales*).

- En una revista de tráfico aparece la siguiente tabla, en la que se muestra la velocidad de un coche y el número de metros necesarios para pararse:

Velocidad	60	80	100	120	…
Metros	18	32	50	72	…

Al aumentar la velocidad, también aumenta la longitud necesaria para pararse. Sin embargo, estas magnitudes no son proporcionales, ya que, por ejemplo:

$$\frac{80}{32}\neq\frac{100}{50}$$

- Generalizando, si los valores o cantidades entre dos magnitudes directamente proporcionales *M* y *M'* son los que se indican en la siguiente tabla:

Magnitud *M*	a	b	c	d	...
Magnitud *M'*	a'	b'	c'	d'	...

entonces se cumple que el cociente o razón de dos cantidades correspondientes es constante:

$$\boxed{\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}=\ldots=k\ \textbf{(constante)}}$$

Esta constante se llama *razón* o *constante de proporcionalidad.*

Dos magnitudes son ***directamente proporcionales*** cuando las fracciones determinadas por las cantidades correspondientes son iguales.

Una proporcionalidad queda determinada cuando se conoce una fracción o su cociente, llamado ***razón*** o ***constante de proporcionalidad.***

Ejemplo. En un puesto de un mercado se vende bolsas de 4 kg de naranjas a 1’32 euros y en otro, de 6 kg a 2’04 euros. ¿Es el coste de las naranjas proporcional a los kilos?

Estas magnitudes serán proporcionales si se cumple la igualdad $\frac{1'32}{4} = \frac{2'04}{6}$

Operando: $\begin{cases} 1'32 \cdot 6 = 7'92 \\ 2'04 \cdot 4 = 8'16 \end{cases}$

Puesto que los productos son distintos, las magnitudes indicadas no son proporcionales.

Ejemplo. Sabiendo que la razón de proporcionalidad vale 2, halla los valores desconocidos de esta tabla.

8	*b*	*c*	14
a	12	100	*d*

Multiplicando y dividiendo por 2 queda:

8	24	200	14
4	12	100	7

EJERCICIOS

1. Observa la siguiente tabla. Comprueba que ambas magnitudes son directamente proporcionales y calcula *x* e *y*.

Magnitud *M*	4	6	7	9	*y*
Magnitud *M’*	12	18	21	*x*	30

2. Se tienen dos triángulos de lados 2 cm, 5 cm, 9 cm y 4 cm, 10 cm, 18 cm. ¿Son proporcionales dichos lados? ¿Son proporcionales los perímetros a los lados?
3. Completa la siguiente tabla de proporcionalidad que relaciona los intereses cobrados por un banco y el capital prestado, en miles de euros.

Capital	100		800	200
Interés	10	500		

1.1. Regla de tres simple directa

Llamamos ***regla de tres simple directa*** al procedimiento que se utiliza para resolver problemas en los que aparecen relacionadas dos magnitudes directamente proporcionales.

Veamos con el siguiente ejemplo cómo resolveremos problemas de estas características.

Ejemplo. Si 3 camisetas de deporte cuestan 14’43 euros, ¿cuánto costarán 7 camisetas?

Intervienen aquí dos magnitudes directamente proporcionales, el número de camisetas y el precio. Del número de camisetas se conocen dos cantidades, 3 y 7, y del precio se conoce una cantidad, 14’43, que corresponde a 3 camisetas.

El problema puede plantearse de dos formas distintas.

- Método de ***reducción a la unidad*** o de ***determinación de la constante de proporcionalidad.***

  Si 3 camisetas cuestan 14’43 €, 1 camiseta cuesta $\frac{14'43}{3} = 4'81$ € (constante de proporcionalidad); luego 7 camisetas costarán 7 · 4’81 = 33’67 €.

- Método de las ***proporciones.***

$$\begin{array}{ccc} 3 \text{ camisetas} & \xrightarrow{\text{cuestan}} & 14'43 \text{ euros} \\ & [D] & \\ 7 \text{ camisetas} & \xrightarrow[\text{costarán}]{} & x \text{ euros} \end{array}$$

Como se trata de magnitudes directamente proporcionales, se escribe $\frac{3}{7} = \frac{14'43}{x}$, de donde resolviendo obtenemos $x = \frac{14'43 \cdot 7}{3} = 33'67$ euros.

EJERCICIOS

4. De cada tonelada de trigo se obtienen 800 kg de harina. ¿Cuántos kg de trigo necesitamos para obtener 13 toneladas de harina?
5. Una bomba tarda 40 minutos en sacar los 2.000 litros de agua que contiene un depósito. ¿Cuánto tiempo tardará en extraer los 40 m^3 de agua que contiene una piscina? Expresa el resultado en horas y minutos.
6. Por empapelar una habitación, cuya superficie de las paredes es de 45 m^2, nos cobran 229'95 euros. ¿Cuánto nos cobrarán por empapelar el salón, si la superficie de las paredes es de 95 m^2?

1.2. Porcentajes

La proporcionalidad directa se expresa a menudo en *porcentajes* o *tantos por ciento*. Para ello, basta determinar la razón de proporcionalidad (*k*) entre ambas magnitudes.

Por ejemplo, si en un instituto decimos que 3 de cada 5 alumnos aprueban en un examen, la razón de proporcionalidad es 3/5. El porcentaje de alumnos que aprueban es el 3/5 · 100 = 0'6 · 100 = 60 %.

> Los ***porcentajes*** o ***tantos por ciento*** expresan la razón entre dos magnitudes directamente proporcionales e indican la cantidad o valor de una de ellas que corresponde a 100 de la otra.

En la siguiente tabla se muestra ésta y otras formas también frecuentes de expresar una proporcionalidad.

Proporcionalidad	***Razón k***	***Tanto por 1***	***Tanto por 100***	***Tanto por 1.000***
3 de cada 4	$\frac{3}{4}$	0'75	75 %	750 ‰
10 por 100	$\frac{10}{100}$	0'10	10 %	100 ‰
14 por 1.000	$\frac{14}{1.000}$	0'014	1'4 %	14 ‰
Escala 1 a 5	$\frac{1}{5}$	0'2	20 %	200 ‰

Conviene recordar que:

> El ***tanto por 1*** se obtiene expresando la razón en forma decimal.
>
> El ***tanto por 100*** se obtiene multiplicando por 100 el tanto por 1.
>
> El ***tanto por 1.000*** se obtiene multiplicando por 1.000 el tanto por 1.

Ejemplo. La relación de aciertos en un partido de baloncesto de máxima rivalidad es:

- Real Madrid: 20 encestes de 25 lanzamientos.
- F. C. Barcelona: 15 encestes de 20 lanzamientos.

¿Cuál de los dos equipos tiene mayor efectividad?

Efectividad del Real Madrid: $\frac{20}{25}\cdot 100 = 80\ \%$

Efectividad del F. C. Barcelona: $\frac{15}{20}\cdot 100 = 75\ \%$

Por tanto, el equipo del Real Madrid tiene una mayor efectividad.

Aumentos y disminuciones porcentuales

En los siguientes ejemplos se muestran algunas situaciones comerciales muy frecuentes para nosotros. Los cálculos necesarios para resolverlas se agilizan mucho si se utilizan los tantos por 1.

Ejemplo. En las rebajas de enero el descuento de una tienda es del 20 % sobre el precio indicado. Una señora compra un vestido etiquetado con 60’10 euros. ¿Cuál es el descuento? ¿Cuánto tiene que pagar?

Por cada euro descuentan $\frac{20}{100} = 0'20 \Rightarrow$ el descuento es de 60’10 · 0’20 = 12’02 euros.

Por cada euro paga 1 − 0’20 = 0’80 $\Rightarrow$ el precio que ha pagar es de 60’10 · 0’80 = 48’08 euros.

Ejemplo. A la mayoría de los productos que se venden, además del precio de fábrica hay que añadir un 16 % por el impuesto sobre el valor añadido (IVA). Un cliente compra un coche cuyo precio de fábrica es 7.512’75 euros. ¿Cuánto pagará de impuestos? ¿Qué precio final tendrá el coche?

IVA = 16 % = 0’16.

Impuesto sobre el valor añadido, IVA: 7.512’75 · 0’16 = 1.202’04 euros.

El coste total es, por tanto, 7.512’75 + 1.202’04 = 8.714’79 euros. No obstante, esta operación se puede hacer directamente: ten en cuenta que por cada euro paga 1 + 0’16 = 1’16, luego el coste total es de 7.512’75 · 1’16 = 8.714’79 euros.

A continuación, se muestran ejemplos donde aparecen situaciones inversas a los anteriores.

Ejemplo. Para una biblioteca se compró una enciclopedia por 753’72 € cuando su precio de venta era de 856’50 €. ¿Qué descuento se aplicó en el precio?

Este problema lo podemos resolver de dos formas:

Primera forma:

Importe de la rebaja: 856’50 − 753’72 = 102’78 euros

$$\text{Descuento} = \frac{\text{Rebaja}}{\text{Precio venta}} = \frac{102'78}{856'50} = 0'12 = 12\ \%$$

Segunda forma:

$$\frac{\text{Precio pagado}}{\text{Precio venta}} = \frac{753'72}{856'50} = 0'88 = 88\ \%$$

Se pagó el 88 % del precio de venta, luego el descuento fue del 100 − 88 = 12 %

Ejemplo. Elena pagó por una bicicleta 184'73 euros incluido el importe del IVA, un 16 % sobre el precio de la bicicleta. ¿Cuál es el precio de fábrica de la bicicleta?

Por cada euro se pagan 1'16 euros; por tanto: Precio IVA incluido = 1'16 · Precio de fábrica

Por tanto, $\text{Precio de fábrica} = \dfrac{\text{Precio IVA incluido}}{1'16} \Rightarrow \text{Precio de fábrica} = \dfrac{184'73}{1'16} = 159'25$ euros.

EJERCICIOS

7. Escribe las siguientes expresiones en forma de razón, tantos por uno, tantos por ciento y tantos por mil.
   a) 4 de cada 5 personas practican el senderismo.
   b) La tasa de natalidad en España en el año 1996 fue del 9'07 ‰.
   c) Una determinada Caja de Ahorros paga un rédito anual, en tanto por uno, del 0'08.
   d) Los aparatos electrodomésticos están sujetos a un 16 % de IVA.
8. Responde a las siguientes cuestiones.
   a) De los 960 alumnos matriculados en un centro, aprobaron el curso 750. ¿Cuál es el porcentaje de aprobados?
   b) El 30 % de una cantidad es 14'46 euros. Averigua la cantidad total.
   c) Si me diesen un 20 % de comisión por las ventas que realizo, ¿cuánto tendría que vender para obtener 500 euros de comisión?
   d) El 80 % de una población tiene más de 16 años. Sabiendo que el resto lo componen 12.000 personas, ¿cuál es el censo total?
9. Un ordenador que costaba el año pasado 781'30 euros cuesta este año 625'04 euros. ¿Qué tanto por ciento supone la disminución en el precio?
10. Al comprar un determinado artículo que vale 13'75 euros nos descuentan 0'55 euros. Halla el porcentaje de descuento.
11. Para el laboratorio del colegio se compra un microscopio por 436'26 € y un frigorífico por 307'02 €. ¿Cuál era el precio de cada uno, si en el microscopio se hizo un descuento del 12 % y en el frigorífico del 14 %?
12. El alquiler de una oficina de 850 euros mensuales sin IVA sufre una subida del 3'5 %. ¿Cuál es el nuevo importe del alquiler? ¿Cuál es el importe total a pagar si a este alquiler se le aplica un IVA del 16 %? ¿Sabrías contestar a esta última pregunta sin necesidad de conocer la primera?
13. Una agencia inmobiliaria cobra, sobre el precio del piso, un 2 % al comprador y un 3'5 % al vendedor. En un piso de 105.180 euros, ¿cuánto recibe la agencia?
14. En 1994 un pantalón vaquero costaba 24 euros. En 1995 subió un 60 ‰ y, en 1996, un 0'25 por uno. ¿Cuánto costaba ese pantalón en 1996? ¿Cuál fue el tanto por ciento total de aumento?
15. Una lavadora se factura con un IVA del 16 % en 493 euros. ¿Cuál es el precio de la misma sin IVA?

2. MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

- En la tabla siguiente se muestran las velocidades y tiempos empleados por los distintos trenes que hacen un trayecto de 900 km. ¿Cuánto tiempo emplearía un tren que circulase a 300 km/h?

Velocidad (km/h)	50	100	150	200	225	…	300
Tiempo (horas)	18	9	6	4'5	4	…	

Podemos observar que:

a) 50 · 18 = 100 · 9 = 150 · 6 = … = 900, es decir, el producto de la velocidad por el tiempo es constante.

Por tanto, para el tren que circula a 300 km/h, el tiempo empleado será de $\dfrac{900}{300} = 3$ horas.

b) También vemos que al duplicar, triplicar, etc., la velocidad, se reduce a la mitad, a la tercera parte, etc., el tiempo empleado en recorrer el trayecto.

Por cumplir estas dos condiciones equivalentes se dice que, en este caso, las magnitudes velocidad y tiempo son *magnitudes inversamente proporcionales*.

- En general, si los valores o cantidades entre dos magnitudes inversamente proporcionales *M* y *M'* son los que se indican en la siguiente tabla:

Magnitud *M*	a	b	c	d	...
Magnitud *M'*	a'	b'	c'	d'	...

entonces se cumple que el producto de dos valores correspondientes es constante:

$$\boxed{\boldsymbol{a \cdot a' = b \cdot b' = c \cdot c' = \ldots = k} \ \textbf{(constante)}} \quad \text{o equivalentemente} \quad \boxed{\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{b'}{a'} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \textit{inversa}\left(\frac{a'}{b'}\right)}}$$

Dos magnitudes son ***inversamente proporcionales*** cuando los productos determinados por las cantidades correspondientes son iguales.

2.1. Regla de tres simple inversa

Llamamos ***regla de tres simple inversa*** al procedimiento que se utiliza para resolver problemas en los que aparecen relacionadas dos magnitudes inversamente proporcionales.

Ejemplo. Con el agua de un depósito se llenan 60 bidones de 5 litros cada uno. ¿Cuántas botellas de 0'75 litros se llenarían con el agua de ese depósito?

En el problema intervienen dos magnitudes inversamente proporcionales, la capacidad y el número de recipientes, y puede plantearse de dos formas.

- Método de ***reducción a la unidad.***

  60 bidones de 5 litros cada uno hacen un total de 60 · 5 = 300 litros.

  Estos 300 litros distribuidos en botellas de 0'75 litros nos dan 300 : 0'75 = 400 botellas.

- Método de las ***proporciones.***

$$\begin{array}{ccc} \text{bidones de 5 litros} & \xrightarrow{\text{se llenan}} & 60 \text{ bidones} \\ & [\text{I}] & \\ \text{botellas de 0'75 litros} & \xrightarrow[\text{se llenarán}]{} & x \text{ botellas} \end{array}$$

Por ser inversamente proporcionales se verifica que $\frac{5}{0'75} = \text{inversa}\left(\frac{60}{x}\right) = \frac{x}{60}$, y resolviendo obtenemos $x = \frac{5 \cdot 60}{0'75} = 400 \text{ botellas}$.

EJERCICIOS

16. Una cuadrilla de 20 obreros hace un trabajo en 30 días. ¿De cuántos obreros se compondrá la cuadrilla que haga el mismo trabajo en 24 días?
17. Una nave espacial almacena alimentos para 8 astronautas y para 15 días. Si en la nave viajan 6 astronautas, ¿para cuántos días tienen alimentos?
18. Juan tarda 25 minutos desde su casa a la casa de un amigo en bicicleta, con una velocidad de 21 km/h. ¿Qué tiempo tardará andando si recorre 1 km en 10 minutos? Expresa el resultado en horas, minutos y segundos.

3. REGLA DE TRES COMPUESTA

La ***regla de tres compuesta*** es un procedimiento que se utiliza, para resolver problemas en los que aparecen tres o más magnitudes, relacionadas dos a dos, directa o inversamente proporcionales.

En la resolución de problemas sobre regla de tres compuesta seguiremos los siguientes pasos:

> 1º) Se ordenan las magnitudes y los datos y se averigua el tipo de proporcionalidad que hay entre cada magnitud con la magnitud que lleva la incógnita (magnitud problema).
>
> 2º) Se resuelve el problema utilizando el siguiente procedimiento: la razón entre dos cantidades de la magnitud problema es igual al producto de las razones de las correspondientes cantidades de las otras magnitudes si éstas son directamente proporcionales o de sus inversas si son inversamente proporcionales a la magnitud problema.

Ejemplo. La piscina de adultos de un polideportivo tiene una capacidad de 168 m^3 y 6 grifos, que abiertos simultáneamente, la llenan en 12 horas. La piscina infantil tiene una capacidad de 28 m^3 y 2 únicos grifos. ¿Cuánto tiempo tardarán éstos en llenarla abiertos simultáneamente?

Las magnitudes que intervienen en este problema son: tiempo de llenado (magnitud problema), capacidad de las piscinas y número de grifos.

El tipo de proporcionalidad que existe entre la magnitud problema y las otras es:

- El tiempo de llenado es directamente proporcional a la capacidad.
- El tiempo de llenado es inversamente proporcional al número de grifos.

Resolvemos el problema:

$$\begin{array}{ccccc} 168\,\text{m}^3 & \longleftrightarrow & 12\,\text{horas} & \longleftrightarrow & 6\,\text{grifos} \\ & [\text{D}] & & [\text{I}] & \\ 28\,\text{m}^3 & \longleftrightarrow & x\,\text{horas} & \longleftrightarrow & 2\,\text{grifos} \end{array}$$

Dependiendo del tipo de proporcionalidad, tenemos que: $\dfrac{12}{x}=\dfrac{168}{28}\cdot\text{inversa}\left(\dfrac{6}{2}\right)$

Resolviendo, obtenemos la solución a nuestro problema:

$$\frac{12}{x}=\frac{168}{28}\cdot\text{inversa}\left(\frac{6}{2}\right)\Leftrightarrow\frac{12}{x}=\frac{168}{28}\cdot\frac{2}{6}\Leftrightarrow\frac{12}{x}=\frac{336}{168}\Leftrightarrow x=\frac{12\cdot168}{336}=6\ \text{horas.}$$

EJERCICIOS

19. Un peregrino del Camino de Santiago, caminando 10 horas diarias durante 24 días, recorre 720 km. ¿Cuántos días necesitará para recorrer 432 km, caminando 8 horas diarias?
20. La familia de Juan está compuesta por cinco miembros y durante los tres primeros meses del año gastaron en alimentación 1.442’45 euros. Durante los siguientes seis meses vivirá su abuelo con ellos. ¿Qué presupuesto deben hacer para la alimentación durante ese tiempo?
21. Para construir 4 casas iguales en 30 días hacen falta 60 albañiles. ¿Cuántos albañiles se necesitarán para construir 6 casas en 90 días?
22. Diez excavadoras hacen un túnel de 4 m de ancho por 3’5 m de alto en 7 días. ¿Cuántas excavadoras serán necesarias para hacer un túnel de 6 m de ancho por 5 m de alto en 5 días?

4. REPARTOS PROPORCIONALES

Recordemos que dos fracciones son iguales (equivalentes) cuando el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$$

Si dos fracciones son iguales, también lo es a éstas la fracción que se obtiene sumando los numeradores y dividiendo por la suma de los denominadores.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

Para comprobarlo basta utilizar la regla de los productos cruzados:

- Por hipótesis: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow ad=bc$
- Sumando ab: $ab+ad=ab+bc$
- Sacando factor común: $a(b+d)=b(a+c) \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$

Por tanto, las tres fracciones son iguales.

Este resultado se extiende a tres o más fracciones y se enuncia en la siguiente regla.

> La suma de los numeradores de varia fracciones iguales dividido por la suma de los denominadores de las mismas es una fracción igual a cualquiera de las dadas.
>
> $$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a'}}=\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b'}}=\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{c'}}=\ldots=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\ldots}{\boldsymbol{a'}+\boldsymbol{b'}+\boldsymbol{c'}+\ldots}$$

4.1. Repartos directamente proporcionales

Las obras de un estadio deportivo han costado 3.150.000 euros, y la deben pagar los ayuntamientos A, B y C de manera proporcional a su número de habitantes, que son 800, 625 y 575. ¿Cuánto le corresponde pagar a cada uno?

Llamemos x a la parte que debe pagar el ayuntamiento A, y la parte de B y z lo que le corresponde al ayuntamiento C. Como estas cantidades deben ser directamente proporcionales al número de habitantes, planteamos entonces la siguiente serie de razones iguales y, teniendo en cuenta el resultado visto anteriormente, tenemos:

$$\frac{x}{800}=\frac{y}{625}=\frac{z}{575}=\frac{x+y+z}{800+625+575}=\frac{3.150.000}{2.000}=1.575 \quad (=k, \text{constante de proporcionalidad})$$

Por tanto:

Al ayuntamiento A le corresponde pagar: $\frac{x}{800}=1.575 \quad \rightarrow \quad x=1.575 \cdot 800=1.260.000$ euros.

Al ayuntamiento B le corresponde pagar: $\frac{y}{625}=1.575 \quad \rightarrow \quad y=1.575 \cdot 625=984.375$ euros.

Al ayuntamiento C le corresponde pagar: $\frac{z}{575}=1.575 \quad \rightarrow \quad z=1.575 \cdot 575=905.625$ euros.

Otra forma de plantear el problema es la siguiente:

La población conjunta de los tres ayuntamientos es de 2.000 habitantes. De esta forma, el coste por habitante es de $\frac{3.150.000}{2.000} = 1.575$ euros, por lo que:

El ayuntamiento A debe pagar: $1.575 \cdot 800 = 1.260.000$ euros.

El ayuntamiento B debe pagar: $1.575 \cdot 625 = 984.375$ euros.

El ayuntamiento C debe pagar: $1.575 \cdot 575 = 905.625$ euros.

4.2. Repartos inversamente proporcionales

En una determinada carrera se destina 330 euros para repartir entre los tres corredores que acaban en los tres primeros puestos de manera proporcional al puesto que ocupan. ¿Cuánto dinero debe recibir cada uno de los tres clasificados?

Debemos repartir el dinero del premio en partes inversamente proporcionales a los números 1, 2 y 3; para ello hacemos el reparto en partes directamente proporcionales a sus inversos, esto es, a 1/1, 1/2 y 1/3. Llamando x, y y z a las cantidades de dinero que recibe cada uno, procedemos de igual forma que en el problema anterior.

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1/2} = \frac{z}{1/3} = \frac{x+y+z}{1+1/2+1/3} = \frac{330}{11/6} = 180$$

Por tanto:

Al 1^{er} clasificado le corresponde: $\frac{x}{1} = 180 \rightarrow x = 180 \cdot 1 = 180$ euros.

Al 2^{o} clasificado le corresponde: $\frac{y}{1/2} = 180 \rightarrow y = 180 \cdot 1/2 = 90$ euros.

Al 3^{er} clasificado le corresponde: $\frac{z}{1/3} = 180 \rightarrow z = 180 \cdot 1/3 = 60$ euros.

EJERCICIOS

23. Los padres de una familia asignan semanalmente a cada uno de sus hijos de 12, 14 y 18 años una cantidad directamente proporcional a su edad. ¿Cuál es la asignación de cada hijo si los padres destinan semanalmente 110 euros para este uso?
24. Una madre da a sus hijos una cierta cantidad de dinero proporcionalmente a sus edades: 12, 17 y 21 años. El pequeño recibe 9 euros. ¿Cuánto le tocó a los otros? ¿Cuál era el total?
25. Tres amigos, Luis, María y Felipe compran juntos un décimo de lotería de 30 euros. Luis juega 12 euros, María 10 euros y Felipe 8 euros. El décimo resulta premiado con 150.000 euros. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?
26. Los tres camarero de una cafetería, José, Juan y Manuel, estuvieron ausentes 3, 4 y 6 días, respectivamente, en un mes. En ese mes se recaudaron 990 euros de propinas que se reparten entre ellos en partes inversamente proporcionales a los días que faltaron. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?
27. Un padre decide repartir su herencia de 330.000 euros entre sus tres hijos, dando proporcionalmente más dinero a los que menos tienen. El mayor tiene 20.000 €, el mediano tiene 40.000 € y el menor tiene 5.000 €. ¿Cuánto le toca a cada uno?

5. INTERÉS SIMPLE

Cuando depositamos una cantidad de dinero en una entidad bancaria, lo que hacemos es prestar dinero a la citada entidad y ella a cambio nos da cada año un tanto por ciento de la cantidad prestada.

La cantidad ***C*** depositada se llama ***capital,*** el dinero que este capital produce, ***i,*** se llama ***interés*** y el interés que producen 100 euros, ***r,*** se llama ***rédito.***

Se nos plantea el problema de resolver la regla de tres compuesta en la que intervienen las magnitudes *capital prestado, dinero producido* (magnitud problema) y *tiempo* durante el cual prestamos el capital.

Seguimos los pasos de resolución de la regla de tres compuesta.

El *dinero producido* es:

- directamente proporcional al *capital prestado;*
- directamente proporcional al *tiempo.*

Resolvemos el problema:

$$\left.\begin{array}{ccccc} C \text{ euros} & \longleftrightarrow & i \text{ euros} & \longleftrightarrow & t \text{ años} \\ & [\mathrm{D}] & & [\mathrm{D}] & \\ 100 \text{ euros} & \longleftrightarrow & r \text{ euros} & \longleftrightarrow & 1 \text{ año} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \frac{i}{r} = \frac{C}{100} \cdot \frac{t}{1}$$

Y operando obtenemos: $\boxed{\boldsymbol{i = \frac{C \times r \times t}{100}} \quad \textbf{(}\boldsymbol{t}\textbf{ en años)}}$

Si el tiempo t viene expresado en meses, como $t \text{ meses} = \frac{t}{12}$ años, al sustituir en la fórmula resulta $i = \dfrac{C \cdot r \cdot \frac{t}{12}}{100}$, de donde obtenemos:

$$\boxed{\boldsymbol{i = \frac{C \times r \times t}{1.200}} \quad \textbf{(}\boldsymbol{t}\textbf{ en meses)}}$$

Análogamente, si el tiempo t viene expresado en días, y teniendo en cuenta que el año comercial tiene 360 días, $t \text{ días} = \frac{t}{360}$ años, y al sustituir en la fórmula resulta $i = \dfrac{C \cdot r \cdot \frac{t}{360}}{100}$, de donde:

$$\boxed{\boldsymbol{i = \frac{C \times r \times t}{36.000}} \quad \textbf{(}\boldsymbol{t}\textbf{ en días)}}$$

<u>Ejemplo.</u> Una persona deposita 2.500 € en un banco que le ofrece un rédito del 3'5 % durante 5 años.

a) ¿Qué interés simple se obtiene al final del periodo?
b) ¿Cuál es el capital final?

a) $i = \dfrac{C \cdot r \cdot t}{100} = \dfrac{2.500 \cdot 3'5 \cdot 5}{100} = 437'5$ €

b) El capital final es de 2.500 + 437'5 = 2.937'5 €

EJERCICIOS

28. En la expresión del interés simple $i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$, despeja C, r y t.

29. Responde a las siguientes cuestiones.
    a) ¿Cuál es el interés producido por 730 euros durante 3 años colocados al 7'5 %?
    b) ¿Cuánto producen 112 euros al 9 % desde el 1 de agosto hasta el 15 de diciembre?
    c) ¿A qué tanto por ciento se han colocado 1.500 € si al cabo de 8 meses se han convertido en 1.575 €?

30. Un banco concede a un cliente un préstamo de 6.010 € al 12 % anual y lo tiene que devolver en 5 años. Si decide pagarlo en recibos trimestrales, ¿qué cantidad consta en cada recibo?

31. Calcula el capital que, colocado al 6 % durante 7 años, se ha convertido en 852 euros.

32. ¿En cuánto tiempo se triplicará un capital colocado al 6%? ¿Y colocado al 10 %?

33. La tercera parte de un capital que se coloca durante 2 años al 8 % produce un interés que, sumado con el que produce el resto del capital en un año al 10 %, totaliza 255 euros. Calcula el capital.

34. *¡¡Vamos a recordar a nuestra antigua peseta!!* La suma de dos capitales C_1 y C_2 es de 17.000.000 de pesetas. El primero de éstos, C_1, colocado durante 6 meses al 7 % produce 140.000 ptas. Halla la cuantía de ambos capitales y calcula el interés que produce el otro capital, C_2, durante 2 años colocado al 3'75 %.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Observa la siguiente tabla. Comprueba que ambas magnitudes son directamente proporcionales y calcula x e y.

Magnitud M	4	6	7	9	y
Magnitud M'	12	18	21	x	30

Son directamente proporcionales, pues $\mathbf{\frac{4}{12} = \frac{6}{18} = \frac{7}{21}}$ Þ $\mathbf{k = \frac{1}{3}}$

Como $\mathbf{\frac{9}{x} = \frac{1}{3}}$ Þ $\mathbf{x = 27}$ **; de igual forma, como** $\mathbf{\frac{y}{30} = \frac{1}{3}}$ Þ $\mathbf{y = 10}$

2. Se tienen dos triángulos de lados 2 cm, 5 cm, 9 cm y 4 cm, 10 cm, 18 cm. ¿Son proporcionales dichos lados? ¿Son proporcionales los perímetros a los lados?

Los lados sí son proporcionales, pues $\mathbf{\frac{2}{4} = \frac{5}{10} = \frac{9}{18}}$ Þ $\mathbf{k = \frac{1}{2}}$

De los perímetros, 16 y 32, tenemos que $\mathbf{\frac{16}{32} = \frac{1}{2} = k}$ Þ **los perímetros también son proporcionales a los lados.**

3. Completa la siguiente tabla de proporcionalidad que relaciona los intereses cobrados por un banco y el capital prestado, en miles de euros.

Capital	100	**5.000**	800	200
Interés	10	500	**80**	**20**

Observa que la constante de proporcionalidad es k = 10.

4. De cada tonelada de trigo se obtienen 800 kg de harina. ¿Cuántos kg de trigo necesitamos para obtener 13 toneladas de harina?
Se necesitan 16.250 kg de trigo para obtener 13 toneladas (13.000 kg) de harina.

5. Una bomba tarda 40 minutos en sacar los 2.000 litros de agua que contiene un depósito. ¿Cuánto tiempo tardará en extraer los 40 m^3 de agua que contiene una piscina? Expresa el resultado en horas y minutos.
Tardará 13 horas y 20 minutos.

6. Por empapelar una habitación, cuya superficie de las paredes es de 45 m^2, nos cobran 229'95 euros. ¿Cuánto nos cobrarán por empapelar el salón, si la superficie de las paredes es de 95 m^2?
Por el salón nos cobrarán 485'45 euros.

7. Escribe las siguientes expresiones en forma de razón, tantos por uno, tantos por ciento y tantos por mil.
   a) 4 de cada 5 personas practican el senderismo.
   b) La tasa de natalidad en España en el año 1996 fue del 9'07 ‰.
   c) Una determinada Caja de Ahorros paga un rédito anual, en tanto por uno, del 0'08.
   d) Los aparatos electrodomésticos están sujetos a un 16 % de IVA.

	Razón	**Tanto por 1**	**Tanto por 100**	**Tanto por 1.000**
a)	**4/5**	**0’8**	**80 %**	**800 ‰**
b)	**907/100.000**	**0’00907**	**0’907 %**	**9’07 ‰**
c)	**8/100 = 2/25**	**0’08**	**8 %**	**80 ‰**
d)	**16/100 = 4/25**	**0’16**	**16 %**	**160 ‰**

8. Responde a las siguientes cuestiones.
   a) De los 960 alumnos matriculados en un centro, aprobaron el curso 750. ¿Cuál es el porcentaje de aprobados?
   b) El 30 % de una cantidad es 14’46 euros. Averigua la cantidad total.
   c) Si me diesen un 20 % de comisión por las ventas que realizo, ¿cuánto tendría que vender para obtener 500 euros de comisión?
   d) El 80 % de una población tiene más de 16 años. Sabiendo que el resto lo componen 12.000 personas, ¿cuál es el censo total?

   a) 78’125 %   b) 48’2 €   c) 2.500 €   d) 60.000 personas

9. Un ordenador que costaba el año pasado 781’30 euros cuesta este año 625’04 euros. ¿Qué tanto por ciento supone la disminución en el precio?
   Una disminución en el precio del 20 %.

10. Al comprar un determinado artículo que vale 13’75 euros nos descuentan 0’55 euros. Halla el porcentaje de descuento.
    Nos descuentan un 4 %.

11. Para el laboratorio del colegio se compra un microscopio por 436’26 € y un frigorífico por 307’02 €. ¿Cuál era el precio de cada uno, si en el microscopio se hizo un descuento del 12 % y en el frigorífico del 14 %?
    El microscopio costaba 495’75 € y el frigorífico 357 €.

12. El alquiler de una oficina de 850 euros mensuales sin IVA sufre una subida del 3’5 %. ¿Cuál es el nuevo importe del alquiler? ¿Cuál es el importe total a pagar si a este alquiler se le aplica un IVA del 16 %? ¿Sabrías contestar a esta última pregunta sin necesidad de conocer la primera?
    El nuevo importe asciende a 879’75 €; aplicando el IVA, el importe total es de 1.020’51 €.
    Te doy una pista, aplica los porcentajes de una forma encadenada.

13. Una agencia inmobiliaria cobra, sobre el precio del piso, un 2 % al comprador y un 3’5 % al vendedor. En un piso de 105.180 euros, ¿cuánto recibe la agencia?
    La agencia recibe 5.784’9 euros.

14. En 1994 un pantalón vaquero costaba 24 euros. En 1995 subió un 60 ‰ y, en 1996, un 0’25 por uno. ¿Cuánto costaba ese pantalón en 1996? ¿Cuál fue el tanto por ciento total de aumento?
    En 1996 costaba 31’8 euros, lo que supone una subida del 32’5 %.

15. Una lavadora se factura con un IVA del 16 % en 493 euros. ¿Cuál es el precio de la misma sin IVA?
    El importe de la lavadora sin IVA es de 425 euros.

16. Una cuadrilla de 20 obreros hace un trabajo en 30 días. ¿De cuántos obreros se compondrá la cuadrilla que haga el mismo trabajo en 24 días?
    La cuadrilla habrá de tener 25 obreros.

17. Una nave espacial almacena alimentos para 8 astronautas y para 15 días. Si en la nave viajan 6 astronautas, ¿para cuántos días tienen alimentos?
    Si viajan 6 astronautas, tendrán comida para 20 días.

18. Juan tarda 25 minutos desde su casa a la casa de un amigo en bicicleta, con una velocidad de 21 km/h. ¿Qué tiempo tardará andando si recorre 1 km en 10 minutos? Expresa el resultado en horas, minutos y segundos.
    Tardará 1 hora, 27 minutos y 30 segundos.

19. Un peregrino del Camino de Santiago, caminando 10 horas diarias durante 24 días, recorre 720 km. ¿Cuántos días necesitará para recorrer 432 km, caminando 8 horas diarias?
    Necesitará, en esas condiciones, 18 días.

20. La familia de Juan está compuesta por cinco miembros y durante los tres primeros meses del año gastaron en alimentación 1.442’45 euros. Durante los siguientes seis meses vivirá su abuelo con ellos. ¿Qué presupuesto deben hacer para la alimentación durante ese tiempo?
    Deberán presupuestar 3.461’88 euros.

21. Para construir 4 casas iguales en 30 días hacen falta 60 albañiles. ¿Cuántos albañiles se necesitarán para construir 6 casas en 90 días?
    Se necesitarán 30 albañiles.

22. Diez excavadoras hacen un túnel de 4 m de ancho por 3’5 m de alto en 7 días. ¿Cuántas excavadoras serán necesarias para hacer un túnel de 6 m de ancho por 5 m de alto en 5 días?
    Serán necesarias 30 excavadoras.

23. Los padres de una familia asignan semanalmente a cada uno de sus hijos de 12, 14 y 18 años una cantidad directamente proporcional a su edad. ¿Cuál es la asignación de cada hijo si los padres destinan semanalmente 110 euros para este uso?
    Al de 12 años le dan 30 €, 35 € al de 14 años y 45 € al mayor de ellos.

24. Una madre da a sus hijos una cierta cantidad de dinero proporcionalmente a sus edades: 12, 17 y 21 años. El pequeño recibe 9 euros. ¿Cuánto le tocó a los otros? ¿Cuál era el total?
    El de 17 años recibe 12’75 € y 15’75 € el de 21 años. El dinero que reparte la madre es 37’5 €.

25. Tres amigos, Luis, María y Felipe compran juntos un décimo de lotería de 30 euros. Luis juega 12 euros, María 10 euros y Felipe 8 euros. El décimo resulta premiado con 150.000 euros. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?
    A Luis le corresponden 60.000 €, 50.000 € a María y 40.000 € para Felipe.

26. Los tres camarero de una cafetería, José, Juan y Manuel, estuvieron ausentes 3, 4 y 6 días, respectivamente, en un mes. En ese mes se recaudaron 990 euros de propinas que se reparten entre ellos en partes inversamente proporcionales a los días que faltaron. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?
    La propina del mes se reparte del siguiente modo: 440 € para José, 330 € para Juan y 220 € para Manuel.

27. Un padre decide repartir su herencia de 330.000 euros entre sus tres hijos, dando proporcionalmente más dinero a los que menos tienen. El mayor tiene 20.000 €, el mediano tiene 40.000 € y el menor tiene 5.000 €. ¿Cuánto le toca a cada uno?
    Nota: para simplificar los cálculos observa que se trata de un reparto inversamente proporcional a 20, 40 y 5.

    El mayor recibe 60.000 €, el mediano 30.000 € y 240.000 € recibe el pequeño.

28. En la expresión del interés simple $i = \dfrac{C \cdot r \cdot t}{100}$, despeja *C*, *r* y *t*.

    ¡Ánimo, qué es muy fácil!

29. Responde a las siguientes cuestiones.
    a) ¿Cuál es el interés producido por 730 euros durante 3 años colocados al 7’5 %?
    b) ¿Cuánto producen 112 euros al 9 % desde el 1 de agosto hasta el 15 de diciembre?
    c) ¿A qué tanto por ciento se han colocado 1.500 € si al cabo de 8 meses se han convertido en 1.575 €?
    a) 164’25 €   b) 3’78 €   c) 7’5 %

30. Un banco concede a un cliente un préstamo de 6.010 € al 12 % anual y lo tiene que devolver en 5 años. Si decide pagarlo en recibos trimestrales, ¿qué cantidad consta en cada recibo?
    Deberá pagar 480’80 € cada trimestre durante esos 5 años.

31. Calcula el capital que, colocado al 6 % durante 7 años, se ha convertido en 852 euros.
    Inicialmente, el capital era de 600 euros.

32. ¿En cuánto tiempo se triplicará un capital colocado al 6%? ¿Y colocado al 10 %?
    Colocado a un 6 % se triplicará en 33 años y 4 meses. Al 10 %, en 20 años.

33. La tercera parte de un capital que se coloca durante 2 años al 8 % produce un interés que, sumado con el que produce el resto del capital en un año al 10 %, totaliza 255 euros. Calcula el capital.
    El capital invertido es de 2.125 euros.

34. *¡¡Vamos a recordar a nuestra antigua peseta!!* La suma de dos capitales C_1 y C_2 es de 17.000.000 de pesetas. El primero de éstos, C_1, colocado durante 6 meses al 7 % produce 140.000 ptas. Halla la cuantía de ambos capitales y calcula el interés que produce el otro capital, C_2, durante 2 años colocado al 3’75 %.
    El capital C_1 es de 4.000.000 ptas. y el C_2 es de 13.000.000 ptas. Este último produce 975.000 ptas.